

Prof. Dr. Alfred Toth

## Über die Transfinitheit von Zeichen und von Zeichenklassen

1. Dass Zeichen, d.h. konkrete Zeichen, die arithmetischen Gesetze transfiniten Zahlen erfüllen, wurde bereits in Toth (2011) gezeigt.

a)  $\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$

b)  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

c)  $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

d)  $\aleph_0 = \aleph_0^n$

e)  $\aleph_0^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$

2. Allerdings ist zu präzisieren: Die Menge der Referenzobjekte konkreter Zeichen (Z) ist ein Intervall zwischen 1 Objekt (z.B. „Gott“) und unendlich vielen (z.B. „Moleküle“). Wir wollen das wie folgt notieren:

$$|Z| = [1, \infty].$$

Diese Mächtigkeit geht zusammen mit dem in Toth (2006, S. 50 ff.) gelieferten Beweis der Isomorphie der Semiotik mit dem Körper der reellen (und komplexen: Toth 2006, S. 60 ff.) Zahlen. Nehmen wir den Fall des Fehlens eines Referenzobjektes (z.B. „Einhorn“, „Meerjungfrau“, „Drache“) dazu, können wir also schreiben:

$$|Z| = \aleph_0.$$

3. Was ist nun eine Zeichenklasse? Zeichenklassen sind Menge, in die nicht nur gleiche Zeichen enthalten sind, sondern auch solche, zwischen denen, wie Bense (1983, S. 45) sich ausdrückte, eine „Affinität“ ihrer Referenzobjekte herrscht. Z.B. repräsentiert die Zeichenklasse (3.1 2.1 1.3) sowohl nach Walther (1979, S. 79) eine „typische Fieberkurve“, nach Bense (1981, S. 55) das „Axiomensystem der Aussagenlogik“, nach Bense (1983, S. 30) sowohl „Funktion“ als auch „Urteil“, nach Bense (1983, S. 140) den „Helmholtzschen

Vorstellungstyp“, nach Bense (1983, S. 72) die „topologische Algebra“ (was immer Bense hiermit meint), usw. Zeichenklassen zeichnen sich somit durch eine ihre Transfinitheit begründende Eigenschaft aus, die Bense (1983, S. 45) „Polyrepräsentativität“ nennt. Zeichenklassen haben also nicht wegen der Menge ihrer Referenzobjekte eine unendliche abzählbar unendliche Mächtigkeit, sondern vor allem deshalb, weil sie unendlich viele Zeichen vereinigen, deren Mächtigkeit abzählbar unendlich ist.

4. Genauso wie es in der klassischen Mathematik mehrere Zahlenarten gibt, deren Mächtigkeit  $\aleph_0$  beträgt, so gibt es in der Peirceschen Semiotik deren genau zehn:

$$|3.1\ 2.1\ 1.1| = |3.1\ 2.1\ 1.2| = |3.1\ 2.1\ 1.3| =$$

$$|3.1\ 2.2\ 1.2| = |3.1\ 2.2\ 1.3| = |3.1\ 2.3\ 1.3| =$$

$$|3.2\ 2.2\ 1.2| = |3.2\ 2.2\ 1.3| = |3.2\ 2.3\ 1.3| =$$

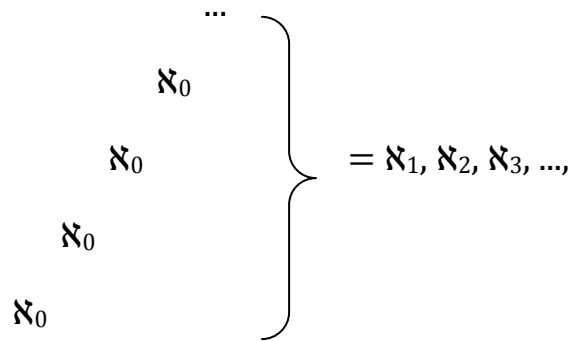
$$|3.3\ 2.3\ 1.3| = \aleph_0$$

Nun geht aus unseren Einleitungskapitel hervor, dass sich  $\aleph_0$  nicht durch die linearen arithmetischen Operationen „vergrössern“ lässt, wohl aber durch Potenzierung: „Während nach unseren Definitionen der Typus  $\alpha + \beta$  die Mächtigkeit  $a + b$ , der Typus  $\alpha\beta$  die Mächtigkeit  $ab$  hat (falls  $\alpha, \beta$  die Mächtigkeit  $a, b$  haben), wird die Potenz  $\alpha^\beta$ , die wir jetzt definieren, keineswegs die Mächtigkeit  $a^b$  haben“ (Hausdorff 1914, S. 117).

Da der Potenzbildung der klassischen Mathematik die Superisation der Peirceschen Semiotik entspricht (vgl. Toth 2007, S. 14 f.), ist also

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

und da wegen der potentiell unendlichen Hierarchie der Superzeichenbildung dieses Vorgehen theoretisch beliebig wiederholt werden kann, bekommen wir



also eine superativ-abgestufte Hierarchie von semiotischen Unendlichkeiten.

## Bibliographie

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Hausdorff, Felix, Grundzüge der Mengenlehre. Berlin 1914

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Allgemeine Zeichengrammatik. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Sind Peirce-Zahlen transfinit? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Peirce-Zahlen%20transfinit.pdf> (2011)

1.5.2011